airiti

人口學刊
第 58 期，2019 年 6 月，頁 1-37
Journal of Population Studies
No. 58, June 2019, pp. 1-37

研究論文
DOI:10.6191/JPS.201906_58.0001

死亡率模型之比較：以臺灣資料爲例

李永琮* 劉議謙** 宮可倫***

* 國立嘉義大學財務金融學系副教授
E-mail: engtsong@mail.ncyu.edu.tw
** 國立臺中科技大學保險金融管理系助理教授
E-mail: icliu@nutc.edu.tw
*** 逢甲大學風險管理與保險學系助理教授，通訊作者
E-mail: klkung@mail.fcu.edu.tw

收稿日期：2019.05.14；接受刊登：2019.09.10

airiti

摘要

死亡率模型之探討是保險精算領域重要之研究課題，近年來國際上有許多新模型發展，然而相關文獻鮮少使用臺灣資料進行實證。本研究介紹幾個比較新穎的模型，提供我國保險公司參考，包括Plat於2009年提出的M9、O'Hare與Li於2012年提出的M10、Mitchell et al.於2013年提出的Mc-1與Mc-2等，利用Human Mortality Database（HMD）資料庫1970-2014年之20-90歲臺灣單齡組死亡率資料進行配適與預測，並考慮非高斯分配（variance gamma分配、normal inverse Gaussian分配、skewed *t*分配）於Mc-1以及Mc-2模型之期間效果以檢視兩模型之預測能力。研究結果發現在配適能力上，若以殘差平方和平方根（root sum of squared errors, RSSE）作為衡量標準，男性資料適合Mc-2模型，女性資料適合M9模型。在死亡率趨勢中，若以Akaike information criterion（AIC_c）為衡量基礎，女性資料存在非高斯分配之特性。在模型預測能力上，不論以RSSE或平均絕對百分比誤差（mean absolute percentage error, MAPE）作為衡量標準，男性資料皆以Mc-2模型最佳，女性則以M10模型最佳，且預測之對數死亡率95%信賴區間大多皆包含樣本外資料。整體而言，本文建議臺灣死亡率男性資料適合Mitchell et al.於2013年提出之Mc-2模型，而女性資料則適合用M10模型。

關鍵詞：死亡率模型、非高斯分配、期間效果

airiti

壹、前言

死亡率模型之探討是保險精算領域非常重要之研究課題，若無法準確預測死亡率，人身保險商品定價可能產生誤差。倘若保險公司高估死亡率，表示未來真實死亡速度低於預期，將造成高估壽險商品保費，低估年金商品保費之情形；而低估死亡率則造成反向之結果。在目前各種退休給付面臨減少之趨勢下，年金保險商品之重要性將日益增加，若保險公司能夠掌握先進之模型，有效推估死亡率，則能夠在提供具市場競爭力費率商品的同時，避免長壽風險之負面衝擊。

國際上有關於死亡率模型探討之文獻在近二、三十年來非常豐富，但國內產業界對於死亡率模型之應用與發展較不熟悉，且國際上之主要文獻幾乎甚少使用臺灣資料進行實證分析。有鑑於此，本文介紹近年來比較重要之死亡率模型供產業界參考，同時利用臺灣死亡率資料進行模型配適與預測能力分析，以建議適用於臺灣資料之死亡率模型。

最廣為我國保險業所熟知的死亡率模型當屬Lee-Carter模型（Lee and Carter 1992），本研究稱之為LC模型，其具有方便操作之優點，且能提供相當的準確性，因此迄今仍被廣泛使用。標準之LC模型參數估計方式為奇異值分解（singular value decomposition, SVD）法，但當死亡率資料有缺漏值時，SVD法便無法操作；因此，Lee and Carter（1992）亦提供了近似法（approximation method）以作為當死亡率資料不完整時之參數估計方式。LC模型是死亡率模型的先驅，之後有許多學者提出各種不同之方法以改善LC模型，包括Brouhns et al.（2002）、Renshaw and Haberman（2006）、Yang et al.（2010）、Mitchell et al.（2013）等。此外，也有許多學者提出截然不同之模型，例如Cairns-Blake-Dowd（CBD）（Cairns et al. 2006）、Cairns et al.（2009）、Tsai and Jiang（2011）、Tsai and Chung（2013）等。在

airiti

上述文獻中，CBD模型亦具備良好之配適與預測能力，其延伸之模型於後續研究中廣泛地被討論與應用，例如Plat（2009）、O'Hare and Li（2012）等。我們在第貳節文獻探討將提供上述文獻進一步之介紹。

近年來，與LC模型有關且比較新穎之模型為Mitchell et al.（2013），與CBD模型有關而新穎之模型則為Plat（2009）及O'Hare and Li（2012）。本研究將介紹上述模型，並利用臺灣死亡率資料進行死亡率配適與預測。Mitchell et al.修正LC模型的作法，對死亡率之自然對數進行差分，其模型與LC模型一樣具有容易操作之優點，且實證結果發現其配適效果優於過去之死亡率模型，同時亦具備良好預測能力；Mitchell et al.模型之參數估計方式亦為SVD法，如同LC模型考慮一個期間效果（period effect）時，本研究稱之為Mc-1模型，當考慮二個期間效果時，本研究稱之為Mc-2模型。Plat將高低年齡族群區分開來，使得兩族群之期間效果產生差異，進而發展出包括三個期間效果與一個世代效果（cohort effect）之死亡率模型，並使用美國、英國、荷蘭資料以LC模型、Renshaw and Haberman（2006）模型、CBD模型進行比較，顯示Plat模型有不錯的配適能力。O'Hare and Li（2012）修正了Plat模型，考慮低年齡族群年齡因子的平方效果，使得模型更適用於年輕族群。本研究沿用O'Hare and Li（2012）之用法，稱Plat模型為M9模型，O'Hare and Li（2012）模型為M10模型。

根據過去經驗，當戰爭、地震、海嘯、颶風與傳染病等巨災事件發生時，各國死亡率偶有伴隨大幅度震盪，因此，許多學者建議使用厚尾分配考慮死亡率之配適或預測，常見之厚尾分配包括variance gamma（VG）分配（Madan and Seneta 1987, 1990）、normal inverse Gaussian（NIG）分配（Barndoff-Nielsen 1994）、Skewed *t*（ST）分配（Hansen 1994）等。許多研究顯示加入厚尾分配之死亡率模型比起原本單純之常態分配假設確實具有較好的配適結果（Clark et al. 2013; Giacometti et al. 2009; Mitchell et al. 2013; C.-W. Wang et al. 2011; C.-W. Wang et al. 2013; C.-W. Wang et al. 2015），可以更準確地捕捉死

airiti

亡率趨勢。因此，在利用Mc-1模型與Mc-2模型進行死亡率預測時，本文亦考慮利用上述常見的厚尾分配捕捉期間效果之趨勢，以檢視臺灣資料之屬性。

死亡率模型之文獻因研究模型或研究議題之不同，探討之年齡區間不盡相同；例如，Mitchell et al.（2013）提出Mc-1、Mc-2模型，討論11個國家、0-105歲五齡組死亡率資料，Plat（2009）提出M9模型，並探討1961-2005年20-84歲美國男性，1961-2005年20-89歲英格蘭威爾斯男性，1951-2005年20-90歲荷蘭男性資料；O'Hare and Li（2012）提出M10模型，探討1950-2006年5-89歲之7個國家男性資料。本研究動機在探討臺灣之死亡率資料較適合哪一個新穎模型，冀望對實務界有直接的助益，故在選取年齡區間時，希望在公平的基礎上來比較這些模型，並兼顧最大之整體年齡區間。因此，我們針對上述文獻所探討的年齡區間取交集而選用20-90歲死亡率資料。O'Hare and Li（2017）從Human Mortality Database（HMD）資料庫檢視30個國家之死亡率資料，發現M9模型與M10模型表現皆優於LC模型及CBD模型。Mitchell et al.使用11個國家之死亡率資料進行分析，發現其提出之Mc-2模型在大多數國家之資料中都比M9模型佳，但是其並未針對Mc-2模型與M10模型進行比較，且上述2篇文章都沒有分析臺灣資料。有鑑於此，本研究利用HMD資料庫1970-2014年20-90歲的臺灣單齡組死亡率資料，考慮M9、M10、Mc-1、Mc-2等新穎模型及LC模型，並使用臺灣資料進行配適與預測，以瞭解臺灣資料適合哪一種模型。此外，Mitchell et al.發現Mc-1模型與Mc-2模型在大部分國家之期間效果較符合NIG分配，本研究亦考慮常態分配、VG分配、NIG分配及ST分配，以探討適合臺灣資料期間效果之分配。

本文之主要貢獻有三：一、本文介紹死亡率模型近年來之發展，提供四個新穎之模型（Mc-1、Mc-2、M9與M10模型）與操作方式供我國產業界參考；二、目前國際上，使用臺灣死亡率資料進行分析者並不多，本研究利用臺灣死亡率資料進行上述模型之配適能力與預測

airiti

能力分析，以建議適用於臺灣資料之死亡率模型；三、針對Mc-1模型與Mc-2模型中期間效果之分配，本研究檢視臺灣資料，以提供模型配適之參考。

本文後續編排如下：第貳節介紹死亡率模型研究之國內外重要文獻；第參節陳述本研究之研究方法，介紹不同之死亡率模型、參數估計方式，以及各種厚尾分配等；第肆節為數值分析，呈現各種模型之配適與預測結果；最後一節則提供結論與建議。

貳、文獻探討

一、國外文獻

國際上討論死亡率模型的文獻非常豐富，LC模型是早期最有名之死亡率模型，其配適步驟簡單且配適效果與預測能力都不錯，因此至今仍被產業界與學術界廣泛使用，LC模型屬於age-period（AP）模型的一種，使用年齡與時間作為參數之設定。LC模型之配適是直接從死亡率出發，Brouhns et al.（2002）則以LC模型為基礎，假設死亡人數服從Poisson分配，提出最大概似法（method of maximum likelihood）的遞迴求解過程。以死亡人數服從Poisson分配為出發點，進而推估死亡率之作法也廣泛的被探討（Brouhns et al. 2002; Cairns et al. 2009; Haberman and Renshaw 2009; National Institute on Aging 1993; Renshaw and Haberman 2006; C.-W. Wang et al. 2013）。

Renshaw and Haberman（2006）在LC模型上加入了世代效果，提升模型配適能力。世代效果目的在捕捉同一世代死亡率之變化；在以橫軸為期間、縱軸為年齡之死亡率矩陣當中，由左上至右下的對角線為同一世代，對角線上之數值表示同一群人在不同年齡之死亡率。Renshaw and Haberman將LC模型的參數增加一項世代效果，文獻上稱之為reduction factor（RH）模型或M2模型，RH模型屬於age-period-

airiti

cohort（APC）模型的一種；然而，H.-C. Wang and Yue（2015）發現RH模型有過度配適及缺乏穩健性之問題。

Cairns et al.（2006）提出了CBD模型，開啟了一系列以年齡作為解釋變數之死亡率模型研究。CBD模型是一個雙因子死亡率模型，其作法是將死亡率以logit函數轉換後再使用迴歸方式估計參數，模型對於60-89歲之死亡率配適有不錯之表現。其後，Cairns et al.（2009）延伸CBD模型，考慮世代效果及高年齡效果（age effect）之平方項，以改善CBD模型之解釋能力。Cairns et al.（2009）將重要之死亡率模型分類成M1-M8，並分析各模型之優劣。

CBD模型之缺點在受限於所選擇之函數較簡單，因此僅適用於死亡率形狀簡單的一定年齡段，例如60-89歲之年長者死亡率。Plat（2009）之M9模型有別於CBD模型，其在模型中加入死亡率平均項，成功將此類模型之適用拓展至青年族群，並結合Renshaw and Haberman（2006）提出之世代效果。O'Hare and Li（2012）提出之M10模型為M9模型之修正，在年輕族群部分，M10模型以平均年齡減去個別年齡之平方加強年輕族群解釋權重，使得M10模型能夠解釋之年齡範圍更加廣泛，提供較好之配適效果與預測能力。

有別於LC模型之SVD分解法，Yang et al.（2010）利用主成分分析法（principal component analysis）拆解死亡率，文獻上稱之為PCA模型，亦屬於LC模型之延伸，Yang et al.檢視亞洲、歐洲與北美洲之死亡率資料，發現PCA模型之預測效果優於LC模型與CBD模型。

提升死亡率模型表現績效的另一個途徑是考慮非高斯分配。Giacometti et al.（2009）利用NIG分配來建構LC模型之殘差項，發現在某些年齡組之配適效果比高斯分配假設好。C.-W. Wang et al.（2011）則運用5種非高斯分配來延伸LC模型，並檢視6個國家由1900-1999年之死亡率，結果明顯發現在模型配適上，非高斯分配優於高斯分配。LC模型是將死亡率取對數後進行SVD分解，而Mitchell

airiti

et al.（2013）則是將對數死亡率取差分後再進行SVD分解；換言之，Mitchell et al.將非高斯分配用於期間效果之差分，並得到較好之死亡率配適結果及預測結果。C.-W. Wang et al.（2013）利用3種非高斯分配來修正具有世代效果之RH模型，並檢視3個國家1900-2009年之死亡率資料，同時評價長壽風險交換（longevity swaps）商品。

除了LC模型及CBD模型之延伸以外，也有許多研究試圖從不同觀點以詮釋並建構死亡率模型。Hainaut and Devolder（2008）是由死力（force of mortality）出發，使用具有均數迴歸特性之Lévy過程隨機變數來捕捉現有死亡率的變化，並假設最佳估計的死力是現有死力加上此Lévy過程的隨機變數，進而推導出Lévy過程下的存活率與死亡率。Tsai and Jiang（2011）延伸S. Wang（1995, 1996）的想法，假設死力估計值為現有死力之線性轉換（linear transform），並推導壽險保單評價公式之近似解，以討論存續期間（duration）與免疫（immunization）理論在死亡率的應用（Tsai and Chung 2013）。

目前國際上相關文獻使用臺灣死亡率資料進行分析者並不多，採用之資料大致可分為二種：（一）內政部之死亡率；（二）健保資料庫，且絕大部分採用的是內政部資料。較早期之研究有Huang et al.（2008）、J. L. Wang and Yang（2008），Huang et al.發現對於臺灣資料而言，LC模型相對於RF模型與APC模型皆有較佳配適效果。[1]J. L. Wang and Yang則是討論臺灣發行長壽債券（longevity bond）的議題，研究結果顯示投資人所要求之風險溢酬（risk premium）將比美國發行之同類型債券高。Yang et al.（2010）也是利用臺灣內政部之死亡率資料。H.-C. Wang and Yue（2015）與H.-C. Wang et al.（2016）使用內政部資料與保險公司之索賠資料探討婚姻狀況，以及抽菸與否兩個變數對於死亡率之影響，H.-C. Wang and Yue發現結婚族群死亡

1　RF模型為英國連續死亡率調查局（Continuous Mortality Investigation Bureau）早期用來預測死亡率的模型（Institute of Actuaries and the Faculty of Actuaries 1999）。

airiti

率比未婚族群低，且婚姻狀況變數所造成之終身壽險保費差異大於抽菸與否所造成之保費差異；H.-C. Wang et al.（2016）也提出類似之結果。H.-C. Wang et al.（2018）提出一個小樣本死亡率模型，並使用臺北市資料進行配適，在人口樣本總數小於20萬人時，其模型配適能力優於LC模型。此外，在健保資料庫之運用方面，Yue et al.（2018）使用健保資料庫建構癌症發生率與死亡率，發現LC模型與APC模型配適效果較佳，但對老年資料而言，CBD模型與Gompertz模型是描述癌症發生率與死亡率趨勢之較佳選擇。然而，因Mc-1、Mc-2、M9及M10等模型之原始文獻皆使用HMD資料進行實證，本研究為了一致性，亦直接使用HMD資料。[2]

二、國內文獻

在國內文獻當中，討論臺灣死亡率之文章也以LC模型之應用居多，尚未採用較新穎之Mc-1、Mc-2、M9與M10模型進行探討，本研究扮演一個重要的角色，不再以LC模型為主。針對臺灣死亡率模型或是死亡率資料，以下介紹國內相關文獻。

黃意萍、余清祥（2002）利用LC模型對臺灣地區生育率進行推估，但模型配適結果不穩定，近幾年不少學者提出修正方法，以加強配適結果的穩定性。陳政勳、余清祥（2010）研究小區域人口推估，使用人口要素變動合成法（cohort component method），考慮生育、死亡、遷移等人口三要素，並以區塊拔靴法（block bootstrap）、篩網拔靴法（sieve bootstrap）、LC模型及函數主成分分析（functional principal component analysis）推估臺北市、雲林與嘉義兩縣、澎湖縣三區域人口數。王信忠、余清祥（2011）採用HMD資料庫之臺灣、日本及美國資料，提出預測高齡死亡率的模型，引入吃角子老虎問

2　HMD資料已使用修勻結果，其人口統計資料來源為內政部；在1974年以前內政部並無統計85歲以上人口數，因此1974年以前85歲以上死亡率係由HMD向外推估而得。

airiti

題（bandit problem）之規律折扣數列（regular discount sequence），並使用布朗運動（Brownian motion）之隨機微分方程式，建立折扣數列模型，以描述老年人之平均餘命變化，以及預測高齡死亡率。王信忠等（2012）探討小區域死亡率推估問題，利用隨機推估的區塊拔靴法加上Whittaker及標準死亡比（standard mortality ratio）等修勻方法，減少因地區人口數少所造成的死亡率震盪。林正祥等（2014）利用衛生福利部提供的死因資料，研究事故傷害對生命年數、工作年數及社會經濟損失等三個面向之影響，其文章利用LC模型探討事故傷害死亡率之變化與預測。董宜禎等（2015）與陳芝嘉等（2015）使用Gompertz模型來探討死亡率，董宜禎等以內政部戶籍人口統計資料討論臺灣人口平均餘命之成長走勢，發現Gompertz模型適合描述存活率及高齡死亡率趨平發展之現象；陳芝嘉等利用地震所屬災區的臺中縣與南投縣，與相鄰的非災區彰化縣比較，討論921地震後，災區與非災區倖存災民死亡率之變化。王信忠等（2016）認為現在臺灣人口老化速度愈來愈明顯，政府推出了許多與老年人口有關之社會保險政策，這些社會保險制度與未來人口結構息息相關，高齡化人口死亡率及平均餘命等數值之推估更顯重要，故該研究主要討論高齡死亡率模型，使用之死亡率資料是臺灣、日本、美國，考慮了包括Gompertz模型、LC模型、RH模型、CBD模型，以及王信忠、余清祥（2011）提出的折扣數列模型、折扣數列比值韋伯模型等。王信忠等（2017）以編算原住民族生命表為目標，採用臺灣原住民族基礎開放研究資料庫，使用阿美族、泰雅族、排灣族資料，考量王信忠等（2012）提出之小區域推估方法，以Gompertz模型及LC模型搭配Whittaker比值、partial standard mortality ratio（PSMR）等修勻方法，取得較穩定之統計數值。

現存文獻尚未檢視臺灣死亡率資料於Mc-1、Mc-2、M9與M10模型之適用情形，而本研究是第一篇作此討論的文章，對於臺灣死亡率之研究具有一定程度之貢獻。

airiti

參、死亡率模型與研究方法

本節首先依序介紹LC模型、Mc-1模型、Mc-2模型、M9模型及M10模型，其後介紹Mc-1模型與Mc-2模型考慮之3種厚尾分配；我們亦介紹相關的研究方法，包括模型配適能力之選取標準、Jarque-Bera（JB）檢定（Jarque and Bera 1980）及數種厚尾分配之選擇標準等。

Lee and Carter（1992）提出之LC模型如下：

$$\ln[m(x,t)] = \alpha_x + \beta_x\kappa_t + \varepsilon_{x,t}^{LC} \quad \text{.....} \quad (1)$$

其中$m(x,t)$是x歲之人在第t期的死亡率，α_x為各年齡對數死亡率之平均值，κ_t為死亡率隨時間變化之指標，亦即期間效果，β_x為死亡率對期間效果之敏感度，又稱為年齡效果，$\varepsilon_{x,t}^{LC}$為殘差項。LC模型在參數估計上有不唯一的情形，因此必須加入限制式來確保參數估計的唯一性。Lee and Carter對κ_t與β_x設定以下兩條限制式：$\sum_t \kappa_t = 0$，$\sum_x \beta_x = 1$。估計上，我們採用Lee and Carter中的SVD法，其估計步驟如下：

一、$\hat{\alpha}_x = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\ln[m(x,t)]$，$T$為$m(x,t)$時間維度資料個數。

二、$\ln[\hat{m}(x,t)] = \ln[m(x,t)] - \hat{\alpha}_x$；將$\ln[\hat{m}(x,t)]$做SVD分解，使得$\hat{m}(x,t) = USV'$，其中$U$與$V$為正交矩陣，$S$為非負的對角線矩陣。

三、為了滿足$\sum_x \beta_x = 1$，$\hat{\beta}_x$等於U矩陣第一行除以U矩陣第一行之所有元素加總。

四、$\hat{\kappa}_t$等於V矩陣第一行乘以$S_{1,1}$，再乘以U矩陣第一行之元素加總；其中$S_{i,i}$表示S矩陣第i列第i行之元素。

一般而言，死亡率模型之建立為資料導向，先有資料後有模型；從模型之發展動機來看，是先觀察到年齡別死亡率資料之模式，再假設函數之形式去配合此一模式，並無一先驗之理論模型。從Lee and Carter（1992）提出死亡率模型後之發展，大致可以把死亡率分成2個

airiti

維度來思考，分別是年齡與年度，因此一般而言使用$m(x,t)$表示x歲之人在第t年度之死亡率，為年齡與年度之函數型式。

死亡率模型的建立，從年齡效果的角度來看可以分為兩類。第一類根據死亡率資料過去所呈現的模式出發，假設年齡效果為年齡之特定函數。例如Gompertz（1825）假設年齡效果為一簡單之指數函數，又或M9模型假設年齡效果為多個年齡線性函數之加總。此類模型對年齡效果之函數假設通常根據欲建模之死亡率年齡範圍而有不同，故Gompertz模型適合用於高年齡死亡率的預測與推估（Yue 2002），而M9模型適合20-90歲年齡區間。此類模型之優點為年齡效果通常為一連續函數，故在死亡率之內外插補上非常容易，當參數估計完成後可完全掌握年齡範圍內之死亡率曲線估計值，也非常適合推導與死亡率相關之數學公式，如保費、平均餘命等。CBD、M9與M10皆屬此類模型。

另一類模型則不預先假設年齡效果之函數形式，而是從資料出發，利用統計方法找尋配適效果最佳之年齡效果估計模式。當考慮模型在各種年齡區間之適用性時，此類模型配適效果一般而言較佳；而其缺點是年齡效果僅在有觀察資料之年齡才能估計，以單齡資料為例，僅在整數歲上能估計或預測死亡率曲線，在沒有資料的年齡（例如非整數年齡）則必須另行假設方能運作。LC、Mc-1與Mc-2模型屬此類。由於死亡率模型本身理論基礎與意涵之差異，其參數估計方式主要可以分成SVD分解法（LC、Mc-1、Mc-2模型），以及簡單迴歸估計（M9、M10模型）搭配牛頓法。

Mitchell et al.（2013）提出之模型定義如下：

Mc-1模型：

$$\ln[m(x,t+1)] = \ln[m(x,t)] + \alpha_x + \beta_x^1 \kappa_t^1 + \varepsilon_{x,t}^{Mc-1} \quad \text{.....} \quad (2)$$

Mc-2模型：

airiti

$$\ln[m(x,t+1)] = \ln[m(x,t)] + \alpha_x + \beta_x^1\kappa_t^1 + \beta_x^2\kappa_t^2 + \varepsilon_{x,t}^{Mc-2} \quad \text{（3）}$$

其中，α_x為各年齡前後期對數死亡率差額之平均值，κ_t^1與κ_t^2為死亡率變化之時間指標，亦即期間效果，β_x^1與β_x^2為死亡率變化指標之年齡指標，稱為年齡效果，$\varepsilon_{x,t}^{Mc-1}$與$\varepsilon_{x,t}^{Mc-2}$為殘差項。值得注意的是，Mc-1或Mc-2模型與LC模型一樣，在參數估計上有過度辨識（over identified）的情形，即參數經過線性轉換後仍能取得相同之死亡率估計值，導致模型參數有無限多解。為了讓模型有唯一解，Mitchell et al.給予四條限制式：$\sum_t \kappa_t^1 = 0$，$\sum_t \kappa_t^2 = 0$，$\sum_x \beta_x^1 = 1$，$\sum_x \beta_x^2 = 1$。令$M_{x,t} = \ln[m(x,t+1)] - \ln[m(x,t)]$，Mc-1及Mc-2模型之參數估計步驟如下：[3]

一、$\hat{\alpha}_x = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} M_{x,t}$，$T$為$M_{x,t}$時間維度資料個數。

二、$\hat{M}_{x,t} = M_{x,t} - \hat{\alpha}_x$；將$\hat{M}_{x,t}$做SVD分解，使得$\hat{M}_{x,t} = USV'$，其中$U$與$V$為正交矩陣，$S$為非負的對角線矩陣。

三、為了滿足$\sum_x \beta_x^1 = 1$，$\hat{\beta}_x^1$等於U矩陣第一行除以U矩陣第一行之所有元素加總。

四、$\hat{\kappa}_t^1$等於V矩陣第一行乘以$S_{1,1}$，再乘以U矩陣第一行之元素加總；其中$S_{i,i}$表示S矩陣第i列第i行之元素。

五、在Mc-2模型之下，為了滿足$\sum_x \beta_x^2 = 1$，$\hat{\beta}_x^2$等於U矩陣第二行除以U矩陣第二行之所有元素加總。

六、在Mc-2模型之下，$\hat{\kappa}_t^2$等於V矩陣第二行乘以$S_{2,2}$，再乘以U矩陣第二行之所有元素加總。

Plat（2009）提出之M9模型定義如下：

$$\ln[m(x,t)] = \alpha_x + \kappa_t^1 + \kappa_t^2(\bar{x} - x) + \kappa_t^3(\bar{x} - x)^+ + \gamma_{t-x} + \varepsilon_{x,t}^{M9} \quad \text{（4）}$$

3　在此估計方法下，Mc-1與Mc-2模型之κ_t^1估計值皆相同。

airiti

其中，$\bar{x}$為樣本範圍內的算術平均年齡，$(\bar{x}-x)^{+}=\max(\bar{x}-x,0)$，$\alpha_x$為各年齡對數死亡率之平均值，$\kappa_t^1$、$\kappa_t^2$、$\kappa_t^3$為期間效果，$\gamma_{t-x}$為世代效果。M9模型通常利用最大概似估計法來估計參數，我們假設在t年時x歲之死亡人數$D(x,t)$服從Poisson($E(x,t)m(x,t)$)分配，其中$E(x,t)$為在t年時x歲之曝險人口數，則模型之概似函數如下：

$$L(\hat{D}(x,t)\mid D(x,t))$$
$$=\sum_x\sum_t\omega_{xt}\left(D(x,t)\ln\hat{D}(x,t)-\hat{D}(x,t)-\ln D(x,t)!\right) \quad \text{（5）}$$

其中，$\hat{D}(x,t)=E(x,t)\hat{m}(x,t)$為死亡人數之估計值，$\omega_{xt}$為一指示函數（indicator function），以排除缺漏之資料；若$D(x,t)$或$E(x,t)$有缺漏則$\omega_{xt}=0$，反之$\omega_{xt}=1$。我們參考Renshaw and Haberman（2006）採用牛頓法估計參數：對於參數θ，其疊代之估計式為：

$$\hat{\theta}^{h+1}=\hat{\theta}^{h}-\frac{\dfrac{\partial L}{\partial\theta}}{\dfrac{\partial^2 L}{\partial\theta^2}}，h=0,1,2, \quad \text{（6）}$$

我們利用上式可推導出$(\kappa_t^1,\kappa_t^2,\kappa_t^3,\gamma_{t-x})$的疊代估計式。對於M9模型，我們依照Plat給予3條限制式以確保參數有唯一解：一、$\sum_{y=y_0}^{y_1}\gamma_y=0$；二、$\sum_{y=y_0}^{y_1}y\gamma_y=0$；三、$\sum_t\kappa_t^3=0$，其中$y=t-x$，$y_1=\max(t)-\min(x)$，$y_0=\min(t)-\max(x)$。估計模型之步驟如下：

一、初始化參數：$\hat{\alpha}_x=\frac{1}{T}\sum_t\ln\frac{D(x,t)}{E(x,t)}$，$\hat{\kappa}_t^{i0}$，$i=1,2,3$採用簡單迴歸估計，[4]並將 $\hat{\kappa}_t^{30}$減去其平均數以符合限制式，又$\hat{\gamma}_y^0=0,\ \forall y$。計算$\hat{D}(x,t)=E(x,t)\hat{m}(x,t)$與$L(\hat{D}\mid D)$。上標0表示起始值。

4　以$\ln[m(x,t)]-\hat{\alpha}_x$為應變數對1, $(\bar{x}-x)$, $(\bar{x}-x)^{+}$做迴歸。

airiti

二、更新κ_t^1：$\tilde{\kappa}_t^{1^{h+1}} = \kappa_t^{1^h} + \dfrac{\sum_t \omega_{xt}\left(D(x,t) - \hat{D}(x,t)\right)}{\sum_t \omega_{xt}\left(\hat{D}(x,t)\right)}$；計算$\hat{D}(x,t)$。

三、更新κ_t^2：$\tilde{\kappa}_t^{2^{h+1}} = \kappa_t^{2^h} + \dfrac{\sum_t \omega_{xt}(\bar{x} - x)\left(D(x,t) - \hat{D}(x,t)\right)}{\sum_t \omega_{xt}(\bar{x} - x)^2\left(\hat{D}(x,t)\right)}$；計算$\hat{D}(x,t)$。

四、更新κ_t^3：$\tilde{\kappa}_t^{3^{h+1}} = \kappa_t^{3^h} + \dfrac{\sum_t \omega_{xt}\left((\bar{x} - x)^+\right)\left(D(x,t) - \hat{D}(x,t)\right)}{\sum_t \omega_{xt}\left((\bar{x} - x)^+\right)^2\left(\hat{D}(x,t)\right)}$；計算$\hat{D}(x,t)$。

五、更新γ_{t-x}：$\tilde{\gamma}_{t-x}^{h+1} = \gamma_{t-x}^h + \dfrac{\sum_y \omega_{xt}\left(D(x,t) - \hat{D}(x,t)\right)}{\sum_y \omega_{xt}\left(\hat{D}(x,t)\right)}$；計算$\hat{D}(x,t)$。

六、調整 $\kappa_t^{3^{h+1}} = \tilde{\kappa}_t^{3^{h+1}} - c$，其中$c = \dfrac{1}{T}\sum_t \tilde{\kappa}_t^{3^{h+1}}$以符合限制式$\sum_t \kappa_t^3 = 0$；將$\tilde{\gamma}_{t-x}$對$t - x + \bar{x}$ 迴歸，得到截距項ϕ_1與迴歸係數ϕ_2，並取其殘差作為γ_{t-x}^{h+1}以符合限制式$\sum_{y=y_0}^{y_1}\gamma_y = 0$與$\sum_{y=y_0}^{y_1} y\gamma_y = 0$；調整$\kappa_t^{1^{h+1}} = \tilde{\kappa}_t^{1^{h+1}} + \phi_1 + \phi_2 t$與$\kappa_t^{2^{h+1}} = \tilde{\kappa}_t^{2^{h+1}} - \phi_2$。調整M9的$\alpha_x = \hat{\alpha}_x + c(\bar{x} - x)^+$。調整M10的$\alpha_x = \hat{\alpha}_x + c\left((\bar{x} - x)^+ + [(\bar{x} - x)^+]^2\right)$。

七、計算$L(\hat{D}|D)$並檢查相對誤差$abs\left(L\left(\hat{D}^{h+1}|D\right) - L\left(\hat{D}^h|D\right)\right)$。若未達到收斂標準則回到步驟二，直至達到收斂標準為止。

O'Hare and Li（2012）提出之M10模型定義如下：

$$\ln[m(x,t)] = \alpha_x + \kappa_t^1 + \kappa_t^2(\bar{x} - x) + \kappa_t^3((\bar{x} - x)^+ + [(\bar{x} - x)^+]^2) + \gamma_{t-x} + \varepsilon_{x,t}^{M10} \quad \text{.....（7）}$$

M10模型與M9類似，只差在κ_t^3項，該平方項調整是為了捕捉低年齡之非線性影響，而M10模型之參數估計方式同M9模型。

本研究參考Mitchell et al.（2013），利用殘差平方和平方根（root sum of squared errors, RSSE）衡量真實對數死亡率（$\ln[m(x,t)]$）與模型配適（預測）對數死亡率（$\ln[\hat{m}(x,t)]$）之誤差，定義如下：

airiti

$$RSSE = \sqrt{\sum_{x,t} \ln[m(x,t)] - \ln[\hat{m}(x,t)])^2} \quad \text{.....} \quad (8)$$

RSSE愈小，表示真實數值與模型配適（預測）數值愈接近，模型配適（預測）能力愈佳。另外，本研究以平均絕對百分比誤差（mean absolute percentage error, MAPE）作為另一個衡量標準，定義如下：

$$MAPE = \frac{1}{n}\sum_{x,t}\left|\frac{\ln[\hat{m}(x,t)] - \ln[m(x,t)]}{\ln[m(x,t)]}\right| \times 100\% \quad \text{.....} \quad (9)$$

其中，n為觀察值個數。

在Mc-1以及Mc-2模型中，死亡率改善之時間趨勢已經藉由對數死亡率之差分捕捉，κ_t^1與κ_t^2通常並不具備時間序列之趨勢。[5]Mitchell et al.（2013）檢視11個國家之死亡率資料，建議以NIG分配配適κ_t^1與κ_t^2，但是其研究並沒有檢視臺灣資料。針對Mitchell et al.之期間效果κ_t^1與κ_t^2，本文先以Jarque and Bera（1980）所提出之常態檢定法（JB檢定）來確認臺灣死亡率資料之期間效果是否適用常態分配。JB檢定統計量為：

$$JB = n\left[\frac{s^2}{6} + \frac{(k-3)^2}{24}\right] \quad \text{.....} \quad (10)$$

其中，n為樣本數，s為樣本之偏態係數，k為樣本之峰態係數。[6]JB檢定之虛無假設（H_0）為樣本來自常態分配，在虛無假設之下，上述檢定統計量服從$\chi^2(2)$，JB統計量之值將靠近0。除了常態分配外，本研究考慮3個厚尾分配：VG分配、NIG分配及ST分配，比較各種分配假設下期間效果之配適結果。常態分配及上述厚尾分配之機率密度函數如下：

5　本文以KPSS檢定（Kwiatkowski et al. 1992），使用0-8期落後期檢視結果。
6　檢定統計量之數值利用Matlab之內建函數jbtest求得。

airiti

$$f_{Normal}(x|\mu,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (11)$$

$$f_{VG}(x|\alpha,\beta,\lambda,\mu)=\frac{(\alpha^2-\beta^2)^{\lambda}|x-\mu|^{\lambda-0.5}K_{\lambda-0.5}(\alpha|x-\mu|)}{\sqrt{\pi}(2\alpha)^{\lambda-0.5}\Gamma(\lambda)}\exp\big(\beta(x-\mu)\big) \quad (12)$$

$$f_{NIG}(x|\alpha,\beta,\delta,\mu)$$
$$=\frac{\alpha\delta}{\pi}\exp\left(\delta\sqrt{\alpha^2-\beta^2}+\beta(x-\mu)\right)\frac{K_1\left(\alpha\sqrt{\delta^2+(x-\mu)^2}\right)}{\sqrt{\delta^2+(x-\mu)^2}} \quad (13)$$

$$f_{ST}(x|\beta,v,\delta,\mu)$$
$$=\frac{\delta^v|\beta|^{\frac{v+1}{2}}\left(\sqrt{\delta^2+(x-\mu)^2}\right)^{-\frac{v+1}{2}}e^{\beta(x-\mu)}}{\sqrt{\pi}2^{\frac{v+1}{2}}\Gamma(v/2)}\times K_{\frac{v+1}{2}}\left(|\beta|\sqrt{\delta^2+(x-\mu)^2}\right),\ \beta\neq 0 \quad (14)$$

其中，$x\in(-\infty,\infty)$；K^{λ}是指標λ的第二型修正巴賽爾函數（Bessel function）；$\Gamma(\cdot)$表示Γ函數。

在κ_t^1與κ_t^2分配之參數估計時，本研究採用最大概似估計法進行估計。對於所有期間t，我們極大化對數概似函數（log-likelihood function, LLF），並分別得到各種分配假設下不同期間效果之LLF，LLF定義如下：

$$LLF=\sum_t \ln\big(f(\kappa_t^i)\big) \quad (15)$$

其中，i = 1或2。在比較分配之優劣時，除了LLF，本研究亦考慮Akaike information criterion（AIC）（Akaike 1974; Burnham and Anderson 2002）、Bayesian information criterion（BIC）（Schwarz

airiti

1978; Wit et al. 2012），以及修正之AIC（AIC_c）（Burnham and Anderson 2002; Cavanaugh 1997）來比較期間效果之配適結果，較大的LLF值或是較小的AIC、BIC、AIC_c值表示模型較佳。AIC、BIC與AIC_c之定義分別如下：

$$AIC = 2N_p - 2\widehat{LLF} \quad (16)$$

$$BIC = \ln(N_0)N_p - 2\widehat{LLF} \quad (17)$$

$$AIC_c = AIC - \frac{2(N_p)^2 + 2N_p}{N_0 - N_p - 1} \quad (18)$$

其中，N_p為估計參數之數目，N_0為樣本個數，$\widehat{LLF}$為對數概似函數之極大值。觀察AIC及BIC公式，不難發現過多的估計參數個數及樣本個數會對AIC及BIC數值造成懲罰。根據Hurvich and Tsai（1989）及Brockwell and Davis（2009），在樣本數有限時，AIC_c衡量方法比AIC更合適，本文將分別呈現上述衡量標準之結果，並根據AIC_c作為最後選擇依據。

在模型預測能力衡量方面，本研究首先依據全段資料選擇適合Mc-1及Mc-2模型之厚尾分配，並將歷史資料區分成樣本內（in-sample）與樣本外（out-of-sample）資料，以樣本內資料配適5個死亡率模型參數，再以樣本外資料之預測結果衡量預測能力。[7]我們利用樣本內資料預測樣本外區間死亡率及95%信賴區間，將樣本外資料視為未來死亡率之實際走勢，比較死亡率預測值與樣本外資料之誤差，並利用RSSE與MAPE衡量模型預測能力之優劣。

7 本文主要參考預測結果挑選適宜之模型，理由有二。其一是死亡率模型之應用主要是提供未來死亡率之預測，故以此作為標準最為直接。其二是雖然樣本內資料之配適可讓我們瞭解模型表現，但過去文獻如White（2000）指出以樣本內資料來評估模型優劣時易受極端值與資料採礦（data-mining）之影響，而以樣本外資料之預測結果驗證模型優劣，由於預測過程中樣本外資料不會干擾模型估計，僅作為驗證之用，故可避免上述問題。常見之計量經濟學教科書如Stock and Watson（2011, p. 613）也使用樣本外預測作為分辨模型好壞之主要做法之一。因此，在評估模型優劣上，本文以預測之結論為主要參考依據。

airiti

由於M9與M10模型之預測依賴模型參數$(\kappa_t^1,\kappa_t^2,\kappa_t^3,\gamma_{t-x})$之時間序列模型產生，因此我們需要為個別參數選取適合的時間序列模型。此處我們參考過去文獻（O'Hare and Li 2012; Plat 2009）的設定，假設$(\kappa_t^1,\kappa_t^2,\kappa_t^3)$服從autoregressive integrated moving average（ARIMA）(p_i,d_i,q_i)，i = 1, 2, 3模型，而γ_{t-x}則服從ARIMA(1,0,0)模型。對於差分項d，我們先以Kwiatkowski–Phillips–Schmidt–Shin（KPSS）檢定選擇最適差分次數，再以BIC為準則，針對時間序列模型中的最適自我迴歸期數p與移動平均期數q，以及具有截距項與否，配合Hyndman and Khandakar（2008）中的逐步選取法來估計樣本內之模型參數，以此作為基礎進行預測並與樣本外之實際值比較。[8]

最後，在95%信賴區間方面，Mc-1及Mc-2模型之作法為考慮對數死亡率，在每一時間t下模擬步驟如下：

一、選定κ_t^1與κ_t^2之分配，生成100,000筆亂數。

二、自$N(0,\hat{\sigma}_x^{Mc-1^2})$與$N(0,\hat{\sigma}_x^{Mc-2^2})$生成100,000筆亂數，其中$\hat{\sigma}_x^{Mc-1^2}=\frac{\sum_t \hat{\varepsilon}_{x,t}^{Mc-1^2}}{T-1}$與$\hat{\sigma}_x^{Mc-2^2}=\frac{\sum_t \hat{\varepsilon}_{x,t}^{Mc-2^2}}{T-1}$，$T$為樣本內資料觀測期間長度。

將上述結果分別代入式（2）與式（3），並計算模擬之對數死亡率$\ln[m(x,t)]$與信賴區間。

在M9模型與M10模型方面，在每一時間t下對數死亡率之信賴區間模擬步驟如下：

一、選定κ_t^1、κ_t^2與κ_t^3時間序列模型，生成100,000筆亂數。

二、自$N(0,\hat{\sigma}_x^{M9^2})$與$N(0,\hat{\sigma}_x^{M10^2})$生成100,000筆亂數，其中$\hat{\sigma}_x^{M9^2}=\frac{\sum_t \hat{\varepsilon}_{x,t}^{M9^2}}{T-1}$與$\hat{\sigma}_x^{M10^2}=\frac{\sum_t \hat{\varepsilon}_{x,t}^{M10^2}}{T-1}$，$T$為樣本內資料觀測期間長度。

8　此處我們依照Plat（2009）與O'Hare and Li（2012）中之作法以BIC選取時間序列模型。以BIC選取模型可獲得參數較少、較為簡潔之時間序列模型。

airiti

將上述結果分別代入式（4）與式（7），並計算模擬之對數死亡率 $\ln[m(x,t)]$與信賴區間。

肆、數值分析

在數值分析第一小節中，我們以全段資料進行模型配適，藉以檢視模型配適能力，並挑選適合Mc-1以及Mc-2模型之厚尾分配；第二小節則以樣本內資料進行參數配適，以樣本外資料作為真實死亡率，以檢視模型預測能力。

一、模型配適

本文使用HMD之臺灣男性與女性死亡率資料進行配適，資料期間為1970-2014年，年齡為20-90歲之單齡組死亡率資料。依據上一節研究方法之步驟，我們先對式（1）-（4）與式（7）五個死亡率模型進行參數估計。表1為死亡率資料配適之RSSE與MAPE，男性資料之RSSE是Mc-2最低，M10次之，其差距為0.025；以MAPE角度而言則是M10最低，Mc-2次之，其差距為0.015%，這2個模型之配適結果相當接近，且皆優於LC模型之配適結果；在女性資料方面，表1雖然一致

表1　死亡率資料配適之RSSE與MAPE

性別	Mc-1	Mc-2	M9	M10	LC
RSSE					
男性	3.642	**3.444**	3.824	3.469	4.188
女性	4.814	4.535	**3.929**	3.974	4.267
MAPE（%）					
男性	1.261	1.198	1.213	**1.183**	1.342
女性	1.369	1.296	**1.081**	1.103	1.186

註：粗體代表配適結果最佳者。

RSSE：殘差平方和平方根（root sum of squared errors）；MAPE：平均絕對百分比誤差（mean absolute percentage error）。

airiti

呈現M9是最佳之模型，不過M10模型之配適結果亦非常接近，RSSE僅相差0.045，MAPE僅相差0.022%，且皆優於LC模型之配適結果。

在Mc-1及Mc-2模型中，本研究利用JB檢定檢查κ_t^1與κ_t^2是否服從常態分配。[9]表2陳列JB檢定之p-value，在95%信心水準下，只有女性之κ_t^1拒絕JB檢定之虛無假設，其餘皆不拒絕樣本服從常態分配之假設。我們進一步考慮VG分配、NIG分配及ST分配來配適κ_t^1與κ_t^2。

表3呈現Mc-1及Mc-2模型之期間效果配適結果，並分別陳列LLF、AIC、BIC及AIC_c四個評斷準則之數值。由表3可知，男性資料之κ_t^1就LLF與AIC評斷準則來說最適合VG分配，就BIC與AIC_c而言則適合常態分配；男性資料之κ_t^2除了LLF準則外，則一致性地推崇常態分配；在女性資料方面，κ_t^1除了BIC準則外，一致性地認為ST分配較合適；κ_t^2則除了LLF準則之外，一致認為常態分配較符合。表3數值結果與表2呼應，表2只有女性資料之κ_t^1拒絕常態分配假設，表3則呈現ST分配為最適分配；其餘之期間效果則皆不拒絕常態分配，以AIC_c標準而言最適分配皆為常態分配。

二、預測結果

在模型預測能力評估方面，我們將1970-2014年歷史資料區分成二段，1970-1999年為樣本內資料，2000-2014年為樣本外資料。本節介紹模型預測過程與結果。

表2　JB檢定之p-value

性別	κ_t^1	κ_t^2
男性	0.1393	0.1891
女性	0.0033	> 0.5000

註：JB: Jarque-Bera。

9　在JB檢定κ_t^1與κ_t^2之前，本文進行KPSS檢定，結果顯示κ_t^1與κ_t^2皆不拒絕定態之虛無假設，我們使用0-8期落後期結果皆一致。

airiti

表3　期間效果之配適結果

厚尾分配	κ_t^1 LLF	AIC	BIC	AIC_c	κ_t^2 LLF	AIC	BIC	AIC_c
男性								
N	-74.584	153.168	**156.736**	**153.460**	25.073	**-46.147**	**-42.578**	**-45.854**
VG	**-72.559**	**153.118**	160.255	154.144	**26.602**	-45.204	-38.068	-44.179
NIG	-72.690	153.381	160.517	154.406	26.546	-45.091	-37.955	-44.066
ST	-72.884	153.767	160.904	154.793	26.475	-44.951	-37.814	-43.925
女性								
N	-68.638	141.276	**144.844**	141.569	146.789	**-289.577**	**-286.009**	**-289.285**
VG	-65.469	138.939	146.076	139.965	**147.046**	-286.093	-278.956	-285.067
NIG	-65.304	138.607	145.744	139.633	146.795	-285.589	-278.452	-284.563
ST	**-65.254**	**138.509**	145.646	**139.534**	145.432	-282.863	-275.726	-281.837

註：粗體代表配適結果最佳者。

LLF：對數概似函數（log-likelihood function）；AIC: Akaike information criterion; BIC: Bayesian information criterion; VG: variance gamma; NIG: normal inverse Gaussian; ST: Skewed *t*。

關於Mc-1與Mc-2模型，我們先利用樣本內期間資料估計模型參數，再以上一節所選取之最佳分配估計κ_t^1與κ_t^2適合分配的參數。對於男性之樣本內資料，κ_t^1與κ_t^2分配之最適參數為

$$\kappa_t^1 \sim N(\mu = 0, \sigma = 1.3331)$$
$$\kappa_t^2 \sim N(\mu = 0, \sigma = 0.1384)$$

對於女性之樣本內資料，κ_t^1與κ_t^2分配之最適參數為

$$\kappa_t^1 \sim f_{ST}(\beta = -0.0700, \nu = 3.7078, \delta = 1.5413, \mu = 0.0948)$$
$$\kappa_t^2 \sim N(\mu = 0, \sigma = 8.70 \times 10^{-3})$$

我們使用以上分配模擬樣本外期間之κ_t^1與κ_t^2，進而得到Mc-1與Mc-2模型之預測死亡率及信賴區間。

關於M9與M10模型，使用上一章所述方式及樣本內期間資料，首先得到$\hat{\alpha}_x$，並進而估計模型參數$(\kappa_t^1, \kappa_t^2, \kappa_t^3, \gamma_{t-x})$，再選取適合之時間序

airiti

列模型。在男性資料方面，我們在5%的顯著水準下以KPSS檢定M9模型之期間效果，發現κ_t^1與κ_t^2皆具有單根，κ_t^3則不具單根；同樣地，在M10模型中結果亦類似，即κ_t^1與κ_t^2皆具有單根，κ_t^3則不具單根。因此我們假設M9與M10中的κ_t^1與κ_t^2服從ARIMA(p,1,q)模型，而κ_t^3則服從ARIMA(p,0,q)模型，並分別求得最適之p與q。在女性資料方面，實證結果發現κ_t^1、κ_t^2與κ_t^3皆具有單根，因此我們假設M9與M10中的κ_t^1、κ_t^2與κ_t^3皆服從ARIMA(p,1,q)模型。

時間序列模型配適後，男性資料在M9模型之期間效果動態如下：

$\Delta\kappa_t^1 = -0.0136 + \epsilon_t$，$\epsilon_t \sim N(0,3.18 \times 10^{-4})$，

$\Delta\kappa_t^2 = 2.83 \times 10^{-4} + \epsilon_t$，$\epsilon_t \sim N(0,2.45 \times 10^{-6})$，

$\kappa_t^3 = 0.9371\kappa_{t-1}^3 + \epsilon_t$，$\epsilon_t \sim N(0,4.87 \times 10^{-4})$。

女性資料在M9模型之期間效果動態如下：

$\Delta\kappa_t^1 = -0.0236 + \epsilon_t$，$\epsilon_t \sim N(0,5.23 \times 10^{-4})$，

$\Delta\kappa_t^2 = 2.60 \times 10^{-4} + \epsilon_t$，$\epsilon_t \sim N(0,2.76 \times 10^{-6})$，

$\Delta\kappa_t^3 = 3.15 \times 10^{-4} + \epsilon_t$，$\epsilon_t \sim N(0,8.92 \times 10^{-6})$。

男性資料在M10模型之期間效果動態如下：

$\Delta\kappa_t^1 = -0.0126 + \epsilon_t$，$\epsilon_t \sim N(0,2.53 \times 10^{-4})$，

$\Delta\kappa_t^2 = 4.72 \times 10^{-4} - 0.3701\Delta\kappa_{t-1}^2 + \epsilon_t$，$\epsilon_t \sim N(0,1.62 \times 10^{-6})$，

$\kappa_t^3 = 0.9250\kappa_{t-1}^3 + \epsilon_t$，$\epsilon_t \sim N(0,4.57 \times 10^{-4})$。

女性資料在M10模型之期間效果動態如下：

$\Delta\kappa_t^1 = -0.0225 + \epsilon_t$，$\epsilon_t \sim N(0,2.90 \times 10^{-4})$，

$\Delta\kappa_t^2 = -2.11 \times 10^{-4} + \epsilon_t$，$\epsilon_t \sim N(0,1.70 \times 10^{-6})$，

$\Delta\kappa_t^3 = 2.11 \times 10^{-6} + \epsilon_t$，$\epsilon_t \sim N(0,4.73 \times 10^{-10})$。

有關M9與M10模型中之世代效果γ_{t-x}，我們參考過去文獻（O'Hare and Li 2012; Plat 2009）的設定，假設γ_{t-x}服從ARIMA(1,0,0)模型。男性資料在M9模型之世代效果γ_{t-x}動態如下：

$\gamma_{t-x} = 0.9371\gamma_{t-x-1} + \epsilon_t$，$\epsilon_t \sim N(0,4.87 \times 10^{-4})$；

女性資料之世代效果γ_{t-x}動態如下：

airiti

$\gamma_{t-x} = 0.5733\gamma_{t-x-1} + \epsilon_t$，$\epsilon_t \sim N(0,5.12 \times 10^{-4})$。

在M10模型中，男性資料之世代效果γ_{t-x}動態如下：

$\gamma_{t-x} = 0.9250\gamma_{t-x-1} + \epsilon_t$，$\epsilon_t \sim N(0,4.57 \times 10^{-4})$；

女性資料之世代效果γ_{t-x}動態如下：

$\gamma_{t-x} = 0.6603\gamma_{t-x-1} + \epsilon_t$，$\epsilon_t \sim N(0,5.50 \times 10^{-4})$。

利用上述時間序列動態，我們進行M9與M10模型之死亡率預測與區間估計，並與Mc-1與Mc-2模型比較。

表4呈現對數死亡率預測值平均數與樣本外資料之間之RSSE與MAPE。在臺灣資料中，對數死亡率改善呈現線性趨勢，又本文檢視之Mc-1模型之κ_t^1與Mc-2模型κ_t^1與κ_t^2期間效果為定態且平均數為0，故以Mc-1與Mc-2模型之點估計預測結果會非常接近。就男性資料而言，雖然Mc-2與M10模型配適結果相近（請參見表1），但樣本外之預測結果無論以RSSE或MAPE為標準，Mc-2模型明顯優於M10模型（請參見表4）；因此，我們建議臺灣男性資料使用Mc-2模型。就女性資料而言，雖然模型配適結果M9優於M10模型，但是M10模型之RSSE與MAPE皆相當接近M9模型（請參見表1），而樣本外之預測結果M10模型明顯優於M9模型（請參見表4），因此我們建議臺灣女性資料使用M10模型。

表4　預測結果之RSSE與MAPE（2000-2014年）

性別	Mc-1	Mc-2	M9	M10	LC
RSSE					
男性	4.457	**4.457**	5.870	6.912	6.009
女性	4.447	4.448	5.790	**4.214**	4.331
MAPE（%）					
男性	2.388	**2.388**	2.422	2.618	2.750
女性	2.484	2.484	2.144	**1.867**	2.507

註：粗體代表預測結果最佳者。

RSSE：殘差平方和平方根（root sum of squared errors）；MAPE：平均絕對百分比誤差（mean absolute percentage error）。

airiti

兩性死亡率模式之差異（男性資料適合Mc-2模型、女性資料適合M10模型）可能來自男女死亡率變異數之差異。圖1是各年齡下所有年度對數死亡率之變異數，圖形顯示女性資料在各年齡下變異數皆高於男性資料，尤其在25-90歲之間更為明顯。比較Mc-2與M10模型之差異，M10是更複雜的模型，除了年齡效果及期間效果外，還多了一個世代效果項γ_{t-x}。由於男性資料相同年齡之對數死亡率變異數低，相對而言較容易單純以年齡效果搭配期間效果解釋，適合使用Mc-2模型捕捉；而女性資料相同年齡之對數死亡率變異數高，除了年齡效果及期間效果外，還需要納入世代效果項，以解釋較複雜之死亡率特徵，因此女性資料適合M10模型。

此外，我們在男性資料以Mc-2模型，女性資料以M10模型來預測樣本外死亡率，圖2呈現25、50、85歲之對數死亡率預測值平均數及95%信賴區間。在信賴區間推估方面，除了25歲男性之樣本外資料在

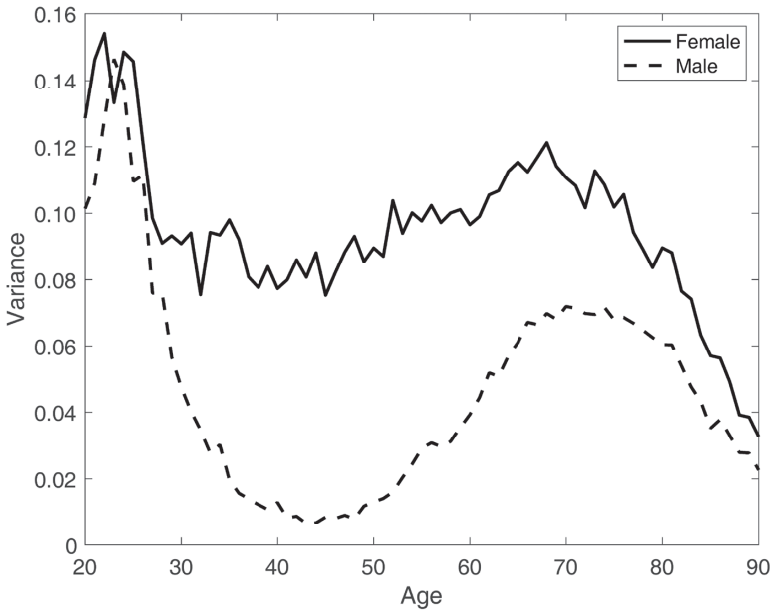

圖1　各年齡下所有年度對數死亡率之變異數（全段資料）

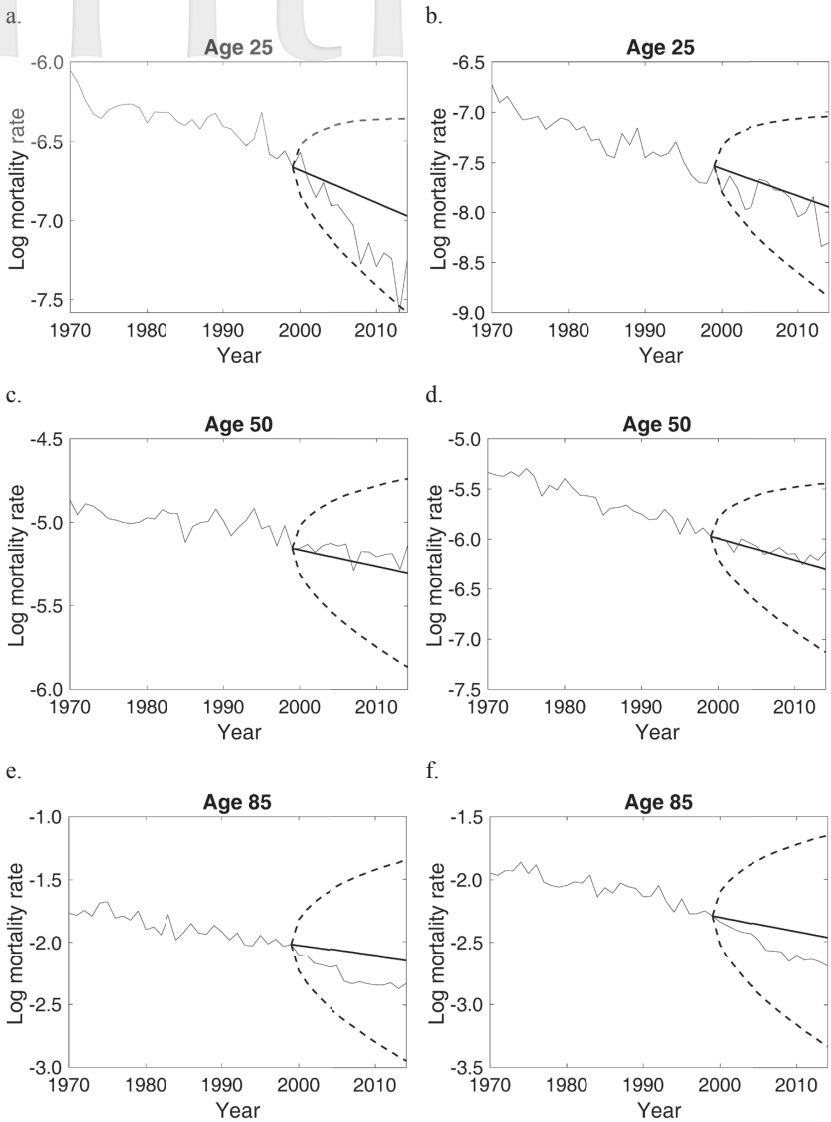

圖2　對數死亡率預測結果，（a）、（c）、（e）為男性；（b）、（d）、（f）為女性

airiti

2013年有數值落在95%信賴區間外，其餘樣本外資料皆落在95%信賴區間內，可見本研究建議之模型具有一定程度之可參考性。

最後，本研究考慮向後預測法（backcasting method）評估建議模型之穩定度；以1985-2014年資料為樣本內資料，1970-1984年資料為樣本外資料。表5為向後預測法之預測結果，與表4之結果一致，男性皆以Mc-2最佳，女性則以M10最佳。在區間估計方面，25、50、85歲3個世代之圖形（如圖3）也一致呈現樣本外資料落在95%信賴區間內，故本研究之建議具備相當程度之穩定度。

伍、結論

本研究針對HMD資料庫1970-2014年臺灣死亡率資料進行探討，利用近年來新穎之死亡率模型檢視其適合度。我們考慮了Mitchell et al.（2013）提出之Mc-1模型與Mc-2模型、Plat（2009）提出之M9模型，以及O'Hare and Li（2012）提出之M10模型，分別呈現模型配適與預測之結果。在1970-2014年臺灣死亡率資料下，本研究發現臺灣男性資料以Mc-2模型配適度最佳，而女性資料則以M9模型之RSSE最小，M10模型次之，但彼此差異不大。在Mc-1模型與Mc-2模型下，

表5　向後預測法之預測結果（1970-1984年）

性別	Mc-1	Mc-2	M9	M10	LC
RSSE					
男性	3.872	**3.870**	5.124	5.025	4.435
女性	4.344	4.344	5.378	**3.760**	4.007
MAPE（%）					
男性	2.596	**2.596**	3.840	3.798	2.962
女性	2.679	2.679	2.985	**2.560**	2.660

註：粗體代表預測結果最佳者。
RSSE：殘差平方和平方根（root sum of squared errors）；MAPE：平均絕對百分比誤差（mean absolute percentage error）。

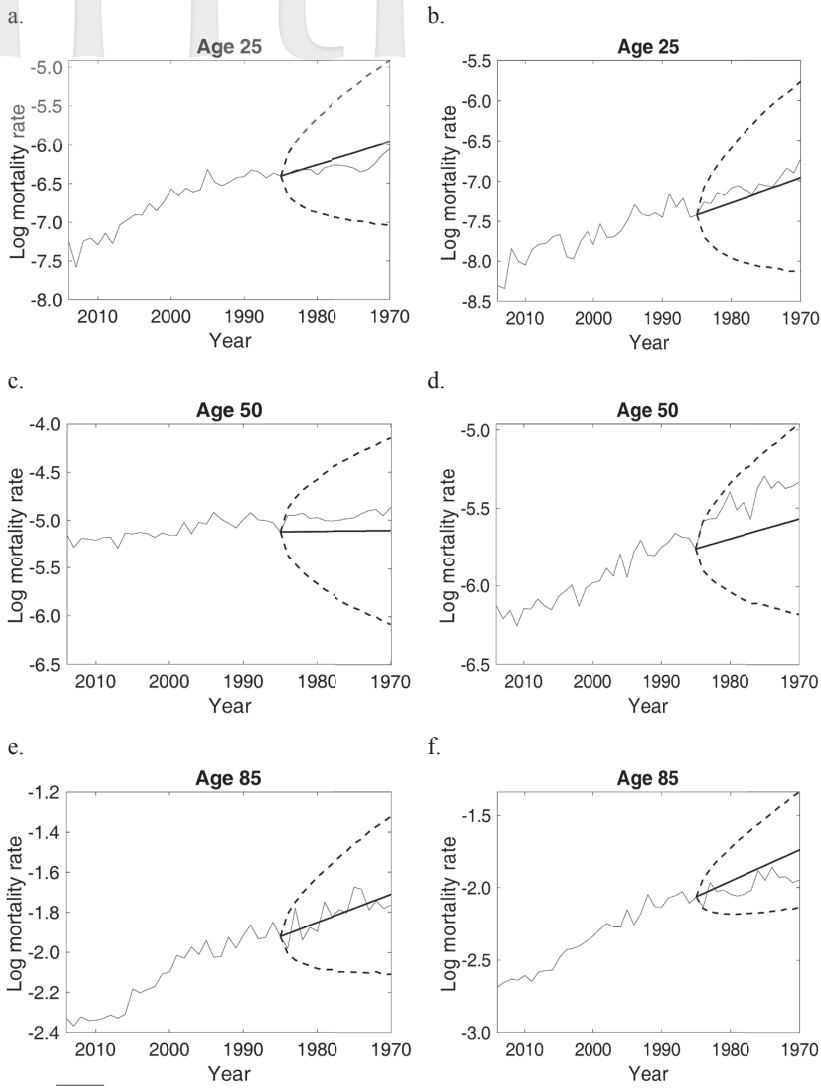

圖3　向後預測法之對數死亡率預測結果，（a）、（c）、（e）為男性；（b）、（d）、（f）為女性

airiti

使用常態分配、VG分配、NIG分配及ST分配檢視男性與女性之期間效果κ_t^1與κ_t^2，並以AIC_c之角度判斷，結果顯示女性資料之κ_t^1適合ST分配，其餘皆適合常態分配。本研究進一步將歷史資料區分成兩段，樣本內資料為1970-1999年，樣本外資料為2000-2014年，實證結果發現，無論以RSSE或MAPE為標準，男性資料以Mc-2模型最佳，女性資料則以M10模型最佳，且預測之對數死亡率95%信賴區間大多皆包含樣本外之資料。此外，女性資料隨時間變異較大，需要加入世代效果項來解釋，故建議臺灣女性死亡率資料適合M10模型，男性資料適合Mc-2模型。

airiti

參考文獻

王信忠、余清祥 [Wang, Hsin-Chung and Jack C. Yue]（2011）規律折扣數列與高齡死亡率。人口學刊，43: 37-70。“Using Regular Discount Sequence to Model Elderly Mortality.” *Journal of Population Studies* 43: 37-70. doi:10.6191/jps.2011.6

王信忠、余清祥、王子瑜 [Wang, Hsin-Chung, Jack C. Yue, and Tzu-Yu Wang]（2017）臺灣原住民族死亡率暨生命表編撰研究。人口學刊，55: 99-131。“A Study of Taiwan Indigenous Peoples Mortality and Life Table Construction.” *Journal of Population Studies* 55: 99-131. doi:10.6191/JPS.2017.55.03

王信忠、余清祥、陳怡萱 [Wang, Hsin-Chung, Jack C. Yue, and Yi-Xuan Chen]（2016）高齡死亡率模型的探討。人口學刊，52: 1-42。“A Study of Elderly Mortality Models.” *Journal of Population Studies* 52: 1-42. doi:10.6191/JPS.2016.52.01

王信忠、金碩、余清祥 [Wang, Hsin-Chung, Shuoh Jin, and Jack C. Yue]（2012）小區域死亡率推估之研究。人口學刊，45: 77-110。“A Simulation Study of Small Area Mortality Projection.” *Journal of Population Studies* 45: 77-110. doi:10.6191/jps.2012.11

林正祥、劉士嘉、劉于琪 [Lin, Cheng-Hsiang, Shih-Chia Liu, and Yu-Chyi Liu]（2014）臺灣事故傷害對潛在生命年數、工作年數及社會經濟損失影響探討。人口學刊，48: 141-171。“The Effect of Accidents on Potential Life Lost, Working Life Lost and Social Economic Loss in Taiwan.” *Journal of Population Studies* 48: 141-171. doi:10.6191/JPS.2014.48.04

陳芝嘉、余清祥、蔡偉德 [Chen, Chih-Chia, Jack C. Yue, and Wei-Der Tsai]（2015）921震災對中老年人死亡風險的影響。人口學刊，50: 61-99。“The Effect of the 921 Chi-Chi Earthquake

airiti

on the Mortality Risk of the Middle-Aged and Elderly." *Journal of Population Studies* 50: 61-99. doi:10.6191/JPS.2015.50.03

陳政勳、余清祥 [Chen, Cheng-Hsun and Jack C. Yue]（2010）小區域人口推估研究：臺北市、雲嘉兩縣、澎湖縣的實證分析。人口學刊，41: 153-183。"A Study of Small Area Population Projection in Taiwan." *Journal of Population Studies* 41: 153-183. doi:10.6191/jps.2010.9

黃意萍、余清祥 [Huang, I-Ping and Jack C. Yue]（2002）臺灣地區生育率推估方法的研究。人口學刊，25: 145-171。"A Comparison of Fertility Projection Methods: A Case Study in Taiwan Area." *Journal of Population Studies* 25: 145-171.

董宜禎、陳寬政、王德睦、吳郁婷 [Dong, Yi-Jhen, Kuan-Jeng Chen, Te-Mu Wang, and Yu-Ting Wu]（2015）臺灣人口平均餘命之趨緩成長。人口學刊，50: 29-60。"Why is the Increase in Life Expectancy Slowing Down? An Analysis Based on Gompertz Function." *Journal of Population Studies* 50: 29-60. doi:10.6191/JPS.2015.50.02

Akaike, H. 1974. "A New Look at the Statistical Model Identification." *IEEE Transactions on Automatic Control* 19(6): 716-723. doi:10.1109/TAC.1974.1100705

Barndorff-Nielsen, O. E. 1994. "Normal\\Inverse Gaussian Processes and the Modeling of Stock Returns." Working Paper No. 300. http://pure.au.dk/portal/en/publications/normal--inverse-gaussian-processes-and-the-modelling-of-stock-returns(28f7fc00-0ffc-11df-b95d-000ea68e967b).html (Date visited: May 12, 2019).

Brockwell, P. J. and R. A. Davis. 2009. *Time Series: Theory and Methods*, 2nd ed. New York: Springer. (Original work published 1991)

Brouhns, N., M. Denuit, and J. K. Vermunt. 2002. "A Poisson Log-Bilinear Regression Approach to the Construction of Projected Lifetables."

airiti

Insurance: Mathematics and Economics 31(3): 373-393. doi:10.1016/S0167-6687(02)00185-3

Burnham, K. P. and D. R. Anderson. 2002. *Model Selection and Multimodel Inference: A Practical Information-Theoretic Approach*. New York: Springer Science & Business Media.

Cairns, A. J. G., D. Blake, and K. Dowd. 2006. "A Two-Factor Model for Stochastic Mortality with Parameter Uncertainty: Theory and Calibration." *The Journal of Risk and Insurance* 73(4): 687-718. doi:10.1111/j.1539-6975.2006.00195.x

Cairns, A. J. G., D. Blake, K. Dowd, G. D. Coughlan, D. Epstein, A. Ong, and I. Balevich. 2009. "A Quantitative Comparison of Stochastic Mortality Models Using Data from England and Wales and the United States." *North American Actuarial Journal* 13(1): 1-35. doi:10.1080/10920277.2009.10597538

Cavanaugh, J. E. 1997. "Unifying the Derivations for the Akaike and Corrected Akaike Information Criteria." *Statistics & Probability Letters* 33(2): 201-208. doi:10.1016/S0167-7152(96)00128-9

Clark, J. S. C., M. Kaczmarczyk, Z. Mongiało, P. Ignaczak, A. A. Czajkowski, P. Klęsk, and A. Ciechanowicz. 2013. "Skew-*t* Fits to Mortality Data—Can a Gaussian-Related Distribution Replace the Gompertz–Makeham as the Basis for Mortality Studies?" *The Journals of Gerontology: Series A* 68(8): 903-913. doi:10.1093/gerona/gls239

Giacometti, R., S. Ortobelli, and M. I. Bertocchi. 2009. "Impact of Different Distributional Assumptions in Forecasting Italian Mortality Rates." *Investment Management and Financial Innovations* 6(3): 186-193.

Haberman, S. and A. E. Renshaw. 2009. "On Age-Period-Cohort Parametric Mortality Rate Projections." *Insurance: Mathematics and Economics* 45(2): 255-270. doi:10.1016/j.insmatheco.2009.07.006

airiti

Hainaut, D. and P. Devolder. 2008. "Mortality Modelling with Lévy Processes." *Insurance: Mathematics and Economics* 42(1): 409-418. doi:10.1016/j.insmatheco.2007.05.007

Hansen, B. E. 1994. "Autoregressive Conditional Density Estimation." *International Economic Review* 35(3): 705-730. doi:10.2307/2527081

Huang, H.-C., J. C. Yue, and S. S. Yang. 2008. "An Empirical Study of Mortality Models in Taiwan." *Asia-Pacific Journal of Risk and Insurance* 3(1): 140-154. doi:10.2202/2153-3792.1033

Hurvich, C. M. and C.-L. Tsai. 1989. "Regression and Time Series Model Selection in Small Samples." *Biometrika* 76(2): 297-307. doi:10.1093/biomet/76.2.297

Hyndman, R. J. and Y. Khandakar. 2008. "Automatic Time Series Forecasting: The Forecast Package for R." *Journal of Statistical Software* 27(3): 1-22. doi:10.18637/jss.v027.i03

Institute of Actuaries and the Faculty of Actuaries. 1999. Standard Tables of Mortality Based on the 1991-1994 Experiences (Special issue). *Continuous Mortality Investigation Reports*, 17.

Jarque, C. M. and A. K. Bera. 1980. "Efficient Tests for Normality, Homoscedasticity and Serial Independence of Regression Residuals." *Economic Letters* 6(3): 255-259. doi:10.1016/0165-1765(80)90024-5

Kwiatkowski, D., P. C. B. Phillips, P. Schmidt, and Y. Shin. 1992. "Testing the Null Hypothesis of Stationarity Against the Alternative of a Unit Root: How Sure are We That Economic Time Series Have a Unit Root." *Journal of Econometrics* 54(1-3): 159-178. doi:10.1016/0304-4076(92)90104-Y

Lee, R. D. and L. R. Carter. 1992. "Modeling and Forecasting U.S. Mortality." *Journal of the American Statistical Association* 87(419): 659-671. doi:10.1080/01621459.1992.10475265

airiti

Madan, D. B. and E. Seneta. 1987. "Chebyshev Polynomial Approximations and Characteristic Function Estimation." *Journal of the Royal Statistical Society Series B (Methodological)* 49(2): 163-169. doi:10.1111/j.2517-6161.1987.tb01687.x

Madan, D. B. and E. Seneta. 1990. "The Variance Gamma (V.G.) Model for Share Market Returns." *The Journal of Business* 63(4): 511-524. doi:10.1086/296519

Mitchell, D., P. Brockett, R. Mendoza-Arriaga, and K. Muthuraman. 2013. "Modeling and Forecasting Mortality Rates." *Insurance: Mathematics and Economics* 52(2): 275-285. doi:10.1016/j.insmatheco.2013.01.002

National Institute on Aging. 1993. *Computational Methods for Fitting and Extrapolating the Lee-Carter Model of Mortality Change*. Bethesda, MD.

O'Hare, C. and Y. Li. 2012. "Explaining Young Mortality." *Insurance: Mathematics and Economics* 50(1): 12-25. doi:10.1016/j.insmatheco.2011.09.005

O'Hare, C. and Y. Li. 2017. "Models of Mortality Rates—Analysing the Residuals." *Applied Economics* 49(52): 5309-5323. doi:10.1080/00036846.2017.1305092

Plat, R. 2009. "On Stochastic Mortality Modeling." *Insurance: Mathematics and Economics* 45(3): 393-404. doi:10.1016/j.insmatheco.2009.08.006

Renshaw, A. E. and S. Haberman. 2006. "A Cohort-Based Extension to the Lee–Carter Model for Mortality Reduction Factors." *Insurance: Mathematics and Economics* 38(3): 556-570. doi:10.1016/j.insmatheco.2005.12.001

Schwarz, G. 1978. "Estimating the Dimension of a Model." *The Annals of Statistics* 6(2): 461-464. doi:10.1214/aos/1176344136

Stock, J. H. and M. W. Watson. 2011. *Introduction to Econometrics*, 3rd ed.

airiti

London: Pearson.

Tsai, C. C.-L. and S.-L. Chung. 2013. "Actuarial Applications of the Linear Hazard Transform in Mortality Immunization." *Insurance: Mathematics and Economics* 53(1): 48-63. doi:10.1016/j.insmatheco.2013.03.013

Tsai, C. C.-L. and L. Jiang. 2011. "Actuarial Applications of the Linear Hazard Transform in Life Contingencies." *Insurance: Mathematics and Economics* 49(1): 70-80. doi:10.1016/j.insmatheco.2011.01.009

Wang, C.-W., H.-C. Huang, and I.-C. Liu. 2011. "A Quantitative Comparison of the Lee-Carter Model under Different Types of Non-Gaussian Innovations." *The Geneva Papers on Risk and Insurance—Issues and Practice* 36(4): 675-696. doi:10.1057/gpp.2011.20

Wang, C.-W., H.-C. Huang, and I.-C. Liu. 2013. "Mortality Modeling with Non-Gaussian Innovations and Applications to the Valuation of Longevity Swaps." *The Journal of Risk and Insurance* 80(3): 775-798. doi:10.1111/j.1539-6975.2013.12002.x

Wang, C.-W., S. S. Yang, and H.-C. Huang. 2015. "Modeling Multi-Country Mortality Dependence and Its Application in Pricing Survivor Index Swaps—A Dynamic Copula Approach." *Insurance: Mathematics and Economics* 63: 30-39. doi:10.1016/j.insmatheco.2015.03.019

Wang, H.-C. and J. C. Yue. 2015. "Mortality, Health, and Marriage: A Study Based on Taiwan's Population Data." *North American Actuarial Journal* 19(3): 187-199. doi:10.1080/10920277.2015.1019518

Wang, H.-C., J. C. Yue, and C.-T. Chong. 2018. "Mortality Models and Longevity Risk for Small Populations." *Insurance Mathematics and Economics* 78: 351-359. doi:10.1016/j.insmatheco.2017.09.020

Wang, H.-C., J. C. Yue, and Y.-H. Tsai. 2016. "Marital Status as a Risk Factor in Life Insurance: An Empirical Study in Taiwan." *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA* 46(2): 487-505. doi:10.1017/asb.2016.3

airiti

Wang, J. L. and S. S. Yang. 2008. "Pricing and Implementation of Longevity Bonds in Taiwan." *Asia-Pacific Journal of Risk and Insurance* 3(1): 155-171. doi:10.2202/2153-3792.1034

Wang, S. 1995. "Insurance Pricing and Increased Limits Ratemaking by Proportional Hazards Transforms." *Insurance: Mathematics and Economics* 17(1): 43-54. doi:10.1016/0167-6687(95)00010-P

Wang, S. 1996. "Ordering of Risks under PH-Transforms." *Insurance: Mathematics and Economics* 18(2): 109-114. doi:10.1016/0167-6687(95)00031-3

White, H. 2000. "A Reality Check for Data Snooping." *Econometrica* 68(5): 1097-1126. doi:10.1111/1468-0262.00152

Wit, E., E. van den Heuvel, and J.-W. Romeijn. 2012. "'All Models are Wrong...': An Introduction to Model Uncertainty." *Statistica Neerlandica* 66(3): 217-236. doi:10.1111/j.1467-9574.2012.00530.x

Yang, S. S., J. C. Yue, and H.-C. Huang. 2010. "Modeling Longevity Risks Using a Principal Component Approach: A Comparison with Existing Stochastic Mortality Models." *Insurance: Mathematics and Economics* 46(1): 254-270. doi:10.1016/j.insmatheco.2009.09.013

Yue, J. C. 2002. "Oldest-Old Mortality Rates and the Gompertz Law: A Theoretical and Empirical Study Based on Four Countries." *Journal of Population Studies* 24: 33-58.

Yue, J. C., H.-C. Wang, Y.-Y. Leong, and W.-P. Su. 2018. "Using Taiwan National Health Insurance Database to Model Cancer Incidence and Mortality Rates." *Insurance: Mathematics and Economics* 78: 316-324. doi:10.1016/j.insmatheco.2017.09.016

airiti

Mortality Model Comparison: Using Taiwanese Data

Yung-Tsung Lee* I-Chien Liu** Ko-Lun Kung***

Abstract

We investigate how new mortality models perform with Taiwanese mortality data. Although much progress has been made in the mortality model literature, practitioners still adopt the Lee-Carter model (1992) for the mortality forecast of the Taiwanese population. We compare the recently developed Mitchell et al. (2013) models with one- and two-factor models, namely Mc-1 and Mc-2, that incorporate heavy-tailed distributions such as variance gamma, normal inverse Gaussian, and skewed *t* distributions into period effects with two increasingly popular parametric models with cohort effects, namely the M9 and M10 models. Using age-specific mortality rates from Human Mortality Database (HMD), we show that the female mortality trend in Taiwan is non-Gaussian, as the model selection criteria such as AIC_c strongly support this. Our results suggest the two-factor Mitchell et al. (2013) model captures the male mortality rates better, while the M10 model performs better for female mortality rates in terms of root sum of squared errors (RSSE) and mean absolute percentage error (MAPE).

Keywords: mortality models, non-gaussian distributions, period effects

* Associate Professor, Department of Banking and Finance, National Chiayi University.
E-mail: engtsong@mail.ncyu.edu.tw

** Assistant Professor, Department of Insurance and Finance, National Taichung University of Science and Technology.
E-mail: icliu@nutc.edu.tw

*** Assistant Professor, Department of Risk Management and Insurance, Feng Chia University. Corresponding author.
E-mail: klkung@mail.fcu.edu.tw

Received: May 14, 2019; accepted: September 10, 2019.